

Logique du premier-ordre

Exercices

Pour cette série d'exercices, nous allons de nouveau utiliser le *Tree Proof Generator*, www.umsu.de/trees.

1. Refaites, avec l'outil, l'exemple du tableau pour $\forall x(\neg P(x)) \wedge \exists y(P(y) \vee Q(y))$ et vérifiez que vous obtenez bien le résultat attendu (lequel d'ailleurs?).
2. Vérifiez, en transformant en FNN, qu'un tableau pour $\neg(P \vee Q)$ produira $\neg P$ et $\neg Q$.
3. L'exercice précédent nous donne une règle pour la construction des tableaux pour une négation d'une disjonction. Vérifiez que c'est bien le cas avec la tautologie $P \vee \neg P$. Vérifiez votre réponse avec l'outil.
4. Refaites l'avant dernier exercice, mais cette fois-ci avec la conjonction et notez qu'il y aura maintenant un branchement dans le tableau.

S'il vous reste du temps, vous pouvez considérer les exercices suivants.

5. Pour encore faire suite à l'exercice 2, vérifiez, en transformant en FNN, qu'un tableau pour une des formules suivantes produira bien les formules spécifiées.
 - (a) $\neg(P \rightarrow Q)$, produira $\neg P$ et Q , sur la branche courante.
 - (b) $\neg(\forall x P(x))$, produira $\neg P(a)$ pour une nouvelle constante a , sur la branche courante.
 - (c) $\neg(\exists x P(x))$, produira $\neg P(a)$ pour toutes les constantes a de la branche courante.
6. Les exercices précédents nous donnent donc les règles pour la construction des tableaux pour une formule quelconque, pas nécessairement en FNN. C'est d'ailleurs ce qu'applique l'outil. Pour chacune des formules suivantes, déterminez intuitivement s'il s'agit d'une tautologie (formule valide) et puis, en vous servant des règles précédentes, construisez le tableau correspondant (celui pour la négation de la formule). Finalement, vérifiez votre résultat avec l'outil.
 - (a) $\forall x P(x) \rightarrow \exists y(P(y) \vee Q(y))$.
 - (b) $\forall x P(x) \wedge \forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y(Q(x, y) \wedge P(x))$.
 - (c) $\forall x \forall y \forall z((P(x) \leftrightarrow P(y)) \vee (P(x) \leftrightarrow P(z)) \vee (P(y) \leftrightarrow P(z)))$
 - (d) $(\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))) \rightarrow (\neg(\forall x \exists y P(x, y)))$.
7. Vérifiez que les exemples de la logique du premier ordre du site de l'outil donnent bien des preuves correctes.

