DIC9305 Logique, informatique et sciences cognitives

Logique de description II

Roger Villemaire

Département d'informatique
UQAM

le 7 mars 2024

Plan

Plan

Logique de description

- La logique de description (DL) permet de raisonner aux niveaux :
  - *terminologique* (TBox), en considérant des *concepts* et des *rôles*,
    - (On parle aussi parfois de (RBox), pour les propriétés de rôles)
  - des *assertions* (ABox), en considérant des *individus*.

TBox

- Une contraintes terminologique (TBox) est une équivalence ou une subsumption de concepts.
  - $Pere \equiv Homme \sqcap \exists enfant.Personne$
  - $Etudiante\_BAC \sqcup Etudiante\_DOC \sqsubseteq Etudiante$
- Il s'agit donc d'un connaissance générale applicable à tous les individus.

ABox

- Une assertion (ABox) est une contrainte qui indique qu'un individu réalise (satisfait) un concept ou qu'un couple d'individus satisfait un rôle (relation).
  - $(Pere \sqcap \leq 2.enfant.Femme)(jean)$
  - *jean enfant jeanne*
    - s'écrit aussi $enfant(jean, jeanne)$

Plan

Sémantique informelle

- Jusqu'à maintenant, le sens donné aux expressions de la logique de description était plutôt intuitif et informel.
- Ceci n'était pas problématique, car on semblait avoir un bel accord au sujet de l'interprétation des exemples présentés !
- Mais, s'il s'avérait qu'on rencontre un exemple complexe avec des interprétations divergentes, comment est-ce qu'on pourra trancher la question ?
- Ceci est, de plus, central d'un point de vue computationnel :
  - Comment pourra-t-on faire une implémentation s'il y a des différents au sujet de l'interprétation des formules ?
  - Le sens serait laissé à l'arbitraire d'une implémentation spécifique ?

Sémantique formelle

- Si la logique veut offrir une interprétation univoque, en évitant le plus possible les ambiguïtés, elle doit proposer une sémantique claire, ne prêtant pas à des interprétations multiples.
- Ceci permettra aussi aux implémentations de suivre cette sémantique et donc de toutes donner le même résultat, ce qui est indispensable à un usage effectif.

Objectif

- Il s’agit donc d’introduire une représentation commune à laquelle on peut se référer pour trancher tout litige et déterminer univoquement le sens d’une formule.

Sémantique ensembliste

- Pour un langage $\mathcal{L}$, qui est un ensemble de symboles de concepts et de rôles, une $\mathcal{L}$-structure (ou simplement une structure quand le langage est clair dans le contexte) est formée
  - d'un univers de discours U contenant des éléments,
  - d'un interprétation des concepts par des sous-ensembles de U,
  - et d'une interprétation des rôles par des relations binaires (ensembles de couples) de U.

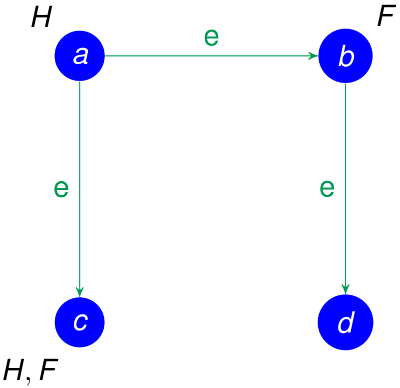
Structure

- Plus précisément, une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{U}$ est formée
  - d'un ensemble U (d'éléments),
  - pour tout concept C de $\mathcal{L}$ d'une interprétation $C^{\mathcal{U}}$ qui est un sous-ensemble de U,
  - et pour tout rôle r de $\mathcal{L}$ d'une interprétation $r^{\mathcal{U}}$ qui est un sous-ensemble de couples (ordonnés) de U.

Exemple

- Avec les concepts H, F ("Homme", "Femme") et le rôle e ("est l'enfant de"), on peut considérer la structure $\mathcal{U}$ suivante
  - $U = \{a, b, c, d\}$,
  - $H^{\mathcal{U}} = \{a, c\}$
  - $F^{\mathcal{U}} = \{b, c\}$
  - $e^{\mathcal{U}} = \{(a, b), (a, c), (b, d)\}$

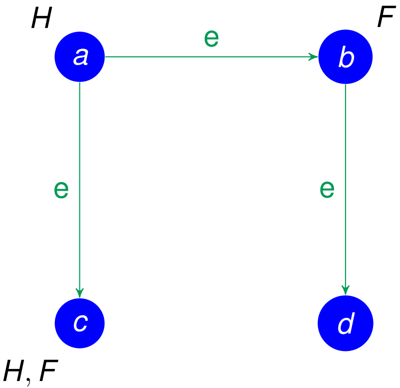
Exemple



Sémantique

- On définit maintenant, pour $\mathcal{U}$, une $\mathcal{L}$-structure l'interprétation $[C]^{\mathcal{U}}$ du concept C dans $\mathcal{U}$:
  - $[C]^{\mathcal{U}} = C^{\mathcal{U}}$ pour les concept atomiques C (ceux de $\mathcal{L}$),
  - $[\top]^{\mathcal{U}} = U$,
  - $[\bot]^{\mathcal{U}} = \emptyset$,
  - $[C \sqcap D]^{\mathcal{U}} = [C]^{\mathcal{U}} \cap [D]^{\mathcal{U}}$,
  - $[C \sqcup D]^{\mathcal{U}} = [C]^{\mathcal{U}} \cup [D]^{\mathcal{U}}$,
  - $[\neg C]^{\mathcal{U}} = U \setminus [C]^{\mathcal{U}}$ (le complément).

Exemple

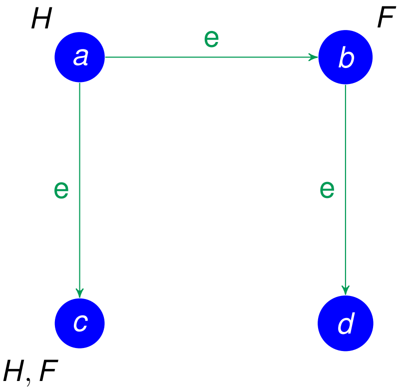


- $[H \sqcap F]^{\mathcal{U}} = [H]^{\mathcal{U}} \cap [F]^{\mathcal{U}} = \{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$,
- $[\neg F]^{\mathcal{U}} = U \setminus [F]^{\mathcal{U}} = U \setminus \{b, c\} = \{a, d\}$,
- $[H \sqcup \neg F]^{\mathcal{U}} = [H]^{\mathcal{U}} \cup [\neg F]^{\mathcal{U}} = \{a, c\} \cup \{a, d\} = \{a, c, d\}$.

Sémantique (suite)

- pour les quantificateurs on définit $[C]^{\mathcal{U}}$ de la façon suivante :
  - $[\forall r.C]^{\mathcal{U}} = \{e;$ pour tout e' tel que $(e, e') \in r^{\mathcal{U}}$ on a $C(e')\}$,
  - $[\exists r.C]^{\mathcal{U}} = \{e;$ il existe un e' tel que $(e, e') \in r^{\mathcal{U}}$ et $C(e')\}$,
  - $[\geq n.\ r.C]^{\mathcal{U}} = \{e;$ il existe au moins n, e' tel que $(e, e') \in r^{\mathcal{U}}$ et $C(e')\}$,
  - $[\leq n.\ r.C]^{\mathcal{U}} = \{e;$ il existe au plus n, e' tel que $(e, e') \in r^{\mathcal{U}}$ et $C(e')\}$,
  - $[r \mid C]^{\mathcal{U}} = \{(e, e');$ tel que $(e, e') \in r^{\mathcal{U}}$ et $C(e')\}$.

Exemple

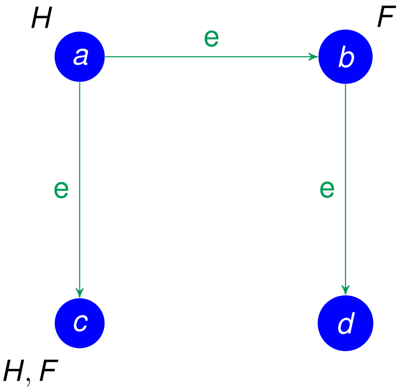


$$[\forall e.F]^{\mathcal{U}} = \{a, c, d\}, \qquad [\exists e.H]^{\mathcal{U}} = \{a\},$$
$$[\leq 1.\ e.\neg H]^{\mathcal{U}} = \{a, b, c, d\}, \quad [\geq 2.\ e.F]^{\mathcal{U}} = \{a\},$$
$$[e \mid H]^{\mathcal{U}} = \{(a, c)\}.$$

Sémantique (suite)

- Finalement, pour une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{U}$:
  - $\mathcal{U}$ satisfait l'égalité de concepts $C \equiv D$. si $[C]^{\mathcal{U}} = [D]^{\mathcal{U}}$,
  - $\mathcal{U}$ satisfait l'inclusion de concepts $C \sqsubseteq D$, si $[C]^{\mathcal{U}} \subseteq [D]^{\mathcal{U}}$,

Exemple



$\mathcal{U}$ satisfait $\exists e.F \sqsubseteq \forall e.F$,

$\mathcal{U}$ satisfait $\geq 1.\ e.\neg H \sqsubseteq H \sqcup F$,

$\mathcal{U}$ satisfait $\exists e.H \equiv H \sqcap \neg F$,

$\mathcal{U}$ satisfait $\geq 2.\ e.H \equiv \perp$.

Validité

- Une égalité ou une inclusion de concepts est *valide* si elle est satisfaite dans **toutes** les structures.
- Mais on veut souvent restreindre les interprétations possibles et donc pour $\mathcal{E}$ un ensemble d'égalité et d'inclusions (de concepts), et $\mathcal{F}$ une égalité ou inclusion (de concepts), on dira que $\mathcal{F}$ est une *conséquence* de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E} \models \mathcal{F}$, si toute structure satisfaisant l'ensemble de toutes les contraintes de $\mathcal{E}$ satisfait aussi $\mathcal{F}$.
- On a donc $\mathcal{E} \models \mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est satisfaite quelle que soit l'interprétation, dans la mesure où celle-ci satisfait $\mathcal{E}$.
- On verra qu'il y a, pour plusieurs logiques de description, des algorithmes pour déterminer $\mathcal{E} \models \mathcal{F}$.

Plan

Questions fondamentales

- Un concept C est *satisfaisable* (ou *cohérent*) s'il existe une structure $\mathcal{U}$ qui ne satisfait pas $C \equiv \perp$,
  - donc si l'interprétation de C peut être non-vide.
- Deux concepts C et D sont dits *équivalents*, si $C \equiv D$ est valide,
  - donc si les interprétations de C et D coïncident toujours.
- Deux concepts C et D sont dits *incompatibles* (ou *disjoints*) si $C \sqcap D \equiv \perp$ est valide,
  - donc si les interprétations de C et D n'ont jamais d'éléments communs.

Questions fondamentales (suite)

- Dans le cadre d'un ensemble d'axiomes (ensemble d'équivalences et d'inclusions) $\mathcal{E}$, on considère aussi les mêmes notions :
  - Un concept C est *satisfaisable* dans $\mathcal{E}$ s'il existe une structure $\mathcal{U}$ satisfaisant $\mathcal{E}$ mais pas $C \equiv \perp$,
  - Deux concepts C et D sont dits *équivalents* dans $\mathcal{E}$, si $C \equiv D$ est satisfaite pour toutes les structures satifaisant $\mathcal{E}$.
  - Deux concepts C et D sont dits *incompatibles* dans $\mathcal{E}$ si $C \sqcap D \equiv \perp$ est satisfaite pour toutes les structures satifaisant $\mathcal{E}$.

Cohérence

- Une ontologie est *cohérente* s'il existe une structure qui la satisfait.
  - La présence d'un concept incohérent ne rend pas une ontologie incohérente.
  - La présence d'un individu dans un concept incohérent oui !