

Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Objectifs d'apprentissage

Après ce cours vous serez en mesure:

- D'identifier les propriétés des filtre RII
- Utiliser des méthodes de conception de filtre RII
 - Calculer l'équation du prototype d'un filtre passe-bas
 - Transformer un prototype du filtre passe-bas en un autre type
 - Convertir l'équation d'un filtre analogique en numérique
- Choisir une architecture de mise en œuvre
- Coder un filtre en Matlab, c ou assembleur

Introduction

- Les filtres RII sont caractérisés par une fonction de transfert exprimée par une fraction rationnelle en z^{-1} :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

- L'introduction de pôles dans $H(z)$ réduit considérablement le nombre de coefficients par rapport à un filtre équivalent RIF.
- Propriétés :
 - Très efficaces en temps de calcul, mais...
 - Offrent une réponse en phase non linéaire en général
 - Leur stabilité doit être vérifiée lors de la conception

Équation d'un filtre RII

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b[k]x[n-k] + \sum_{k=1}^{M-1} a[k]y[n-k]$$

- $x[n]$: valeurs successives du signal d'entrée
 a_k, b_k : coefficients de la fonction de transfert du filtre,
 $y[n]$: valeurs successives du signal de sortie,
 N, M : ordres du numérateur et du dénominateur de $H(Z)$
 (M est souvent appelé l'ordre du filtre).

Pôles et Zéros

- $H(z)$ peut être factorisé pour donner:

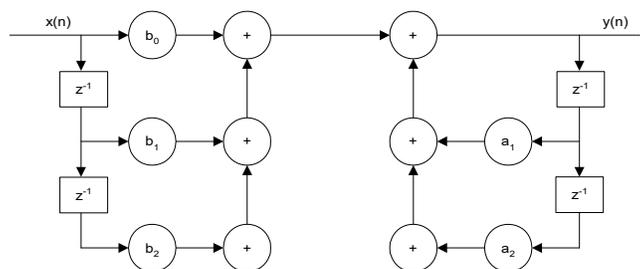
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \\ &= \alpha \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)} \end{aligned}$$

Où: z_1, z_2, \dots, z_n sont les zéros, p_1, p_2, \dots, p_n sont les pôles.

Un filtre RII est spécifié par les valeurs des pôles et des zéros de $H(z)$ (au coefficient de gain α près)

Diagramme de flux

- Exemple pour $N=M=2$



$$y[n] = \sum_{k=0}^2 b[k]x[n-k] + \sum_{k=1}^2 a[k]y[n-k]$$

- À l'instar des filtres RIF, deux filtres RII se distinguent uniquement par les valeurs de leurs coefficients!

Origine du nom RII

- On a: $y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k]$
- Si on remplace le signal d'entrée $x[n]$ par une impulsion $\delta[n]$:

$$\begin{aligned}
 y[n] = h[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} b_k \delta[n-k] + \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k] \\
 &= b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \dots + b_{N-1} \delta[n-(N-1)] \\
 &\quad + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_{M-1} y[n-(M-1)]
 \end{aligned}$$

Origine du nom RII

- Puisque: $\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{for } n = k \\ 0 & \text{for } n \neq k \end{cases}$
- On en déduit:
 - $h[0] = b_0$
 - $h[1] = b_1 - y[0]$
 - \vdots
- Contrairement aux filtres RIF, la réponse continue pour $n > N$, avec une dépendance des valeurs antérieures; $h[n]$ dure infiniment !

$$h[n] = \begin{cases} b_n + \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k] & \text{si } n \leq N-1 \\ \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k] & \text{autrement} \end{cases}$$

Réponse en fréquence

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k]$$

donne :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

- La réponse en fréquence s'obtient en remplaçant z par $e^{j\omega T_e}$:

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T_e}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T_e}}$$

Réponse en fréquence

- Tout comme pour les filtres RIF : $H\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_e}\right) = H(\omega)$

$$\text{car } H\left(\omega + \frac{2\pi}{T_e}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\left(\omega + \frac{2\pi}{T_e}\right)T_e}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\left(\omega + \frac{2\pi}{T_e}\right)T_e}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T_e}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T_e}}$$

- La période est $2\pi/T_e$ sur le cercle de rayon unité, ou simplement 2π si on normalise T_e à 1. Dans ce cas :

$$H(\omega + 2k\pi) = H(\omega)$$

Réponse en phase

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T_e}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T_e}}$$

donne :

$$\begin{aligned} \arg(H(\omega)) &= \arg\left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T_e}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T_e}}\right) \\ &= \arg\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T_e}\right) - \arg\left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T_e}\right) \end{aligned}$$

- En général, la réponse en phase n'est pas linéaire ☹

Stabilité des filtres RII

- Il faut s'assurer que le $H(z)$ ne possède pas de pôles à l'extérieur du cercle défini par $z=1$.
- Les pôles situés le long de $z=1$ donnent lieu à des réponses oscillatoires.

$H(z)$ est couramment exprimé en fonction des puissances négatives de z afin d'assurer la causalité temporelle. Il faut alors convertir son expression en fonction de puissances positives de z avant de déterminer la position des pôles pour l'analyse de stabilité.

Comparaison entre RII et RIF

RIF	RII
<ul style="list-style-type: none"> • Stable par défaut • Demande $N \gg 1$ pour une bonne performance • Réponse en phase linéaire pour un filtre causal • La gamme dynamique des différents états se calcule facilement. • Pas d'équivalent analogique 	<ul style="list-style-type: none"> • La stabilité dépend de la position des pôles de $H(z)$ • Peut donner une performance adéquate pour $n=1$ ou 2 • Réponse en phase non linéaire en général • La gamme dynamique des différents états se calcule difficilement et peut affecter la performance <ul style="list-style-type: none"> • Effets de quantification et d'arrondi plus prononcés que pour RIF. • Possibilité de cycles limites • Peut être dérivé d'un filtre analogique équivalent

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

13

Génération de fonctions

- Les pôles situés le long de $|z|=1$, donnant lieu à des réponses oscillatoires; peuvent servir à générer des fonctions sinusoïdales en temps-réel (avec des fréquences et des amplitudes programmables).

$$\sin(\omega_0 \cdot t)u(t) \Leftrightarrow \frac{z \cdot \sin(\omega_0 \cdot T_e)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_e) + 1}$$

$$\cos(\omega_0 \cdot t)u(t) \Leftrightarrow \frac{z \cdot [z - \cos(\omega_0 \cdot T_e)]}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_e) + 1}$$

- Pour des fonctions périodiques de forme arbitraire, on peut utiliser des tableaux de valeurs

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

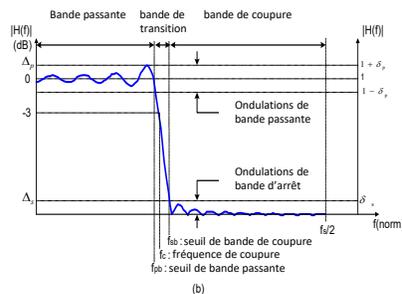
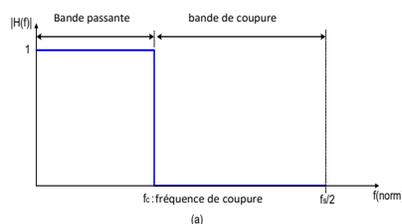
14

Conception d'un filtre RII

- Toujours cinq étapes requises :
 1. Spécification du filtre
 2. Calcul des coefficients
 3. Choix d'une architecture de mise en œuvre.
 4. Simulation (conseillé)
 5. Implémentation.

Étape 1 : spécification du filtre

- On utilise souvent un filtre passe bas de référence que l'on adapte
- Le filtre de référence doit être réalisable



Étape 2 : Calcul des coefficients

- Deux types d'approches:
 1. Conversion formelle d'un filtre analogique
 2. Placement manuel des pôles et zéros

Conversion d'un filtre analogique

- La méthode formelle transforme les résultats de méthodes de conception analogiques établies
 - Consiste à trouver $H(s)$ pour un filtre analogique équivalent, et à le convertir en $H(z)$ ensuite
- Les deux procédures les plus utilisées sont :
 - La transformation bilinéaire :

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\dots}$$

- L'invariance de la réponse impulsionnelle :

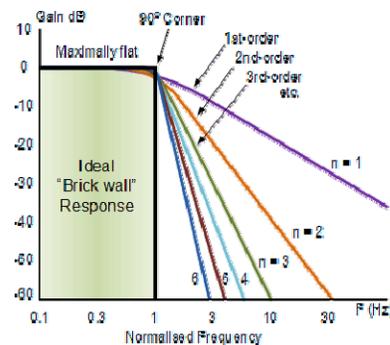
$$h[n] = h(t) \Big|_{t=nT_e}$$

Fonction de transfert analogique

- Plusieurs approches possibles (vues dans MIC5100) :
 - Filtres de Butterworth
 - Filtres de Chebyshev (directe et inverse)
 - Filtre de Causer ou elliptiques
 - Filtres de Bessel
 - Filtre de phase
 - Etc.

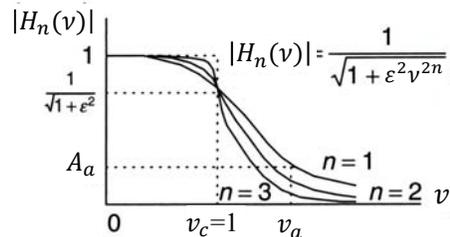
Filtres de Butterworth

- Bande passante
maximalement plate (pas
d'ondulations)
- Réponse en phase **plus
linéaire** que les filtres
Chebyshev ou elliptiques
- Pour un filtre d'ordre n , la
raideur de coupure (pente de
 $|H(j\omega)|$ passé f_c) est $6n$ dB/octave
 - Peut servir à déterminer $n!$



Filtre passe-bas Butterworth

- Réponse en amplitude caractéristique :



- Dans tous les cas :

- Atténuation en dB à la fréquence de coupure ($v = 1$):
 $A_c = -10 \log_{10}(1 + \epsilon^2)$
 Pour $\epsilon = 1$: $A_p = -3 \text{ dB}$
- Atténuation en dB au seuil de la fréquence de coupure :
 $A_a = -10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 v_a^{2n})$

Filtre passe-bas Butterworth

- $H(s)$ normalisé pour n **impair**:

$$H_n(s) = \frac{K}{(s + r) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (s^2 + 2 r s \cos(\theta_k) + r^2)}$$

Où:

$$K = r^n = 1/\epsilon$$

$$r = \epsilon^{-1/n}$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$$

$$\theta_k = \frac{\pi k}{n}$$

Filtre passe-bas Butterworth

- $H(s)$ normalisé pour n pair :

$$H_n(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^{n/2} (s^2 + 2 r s \cos(\theta_k) + r^2)}$$

Où:

$$K = r^n = 1/\varepsilon$$

$$r = \varepsilon^{-1/n} \qquad \varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$$

$$\theta_k = \frac{\pi(2(k-1) + 1)}{2n}$$

Exemple

- $N=2$ et gain de bande passante $A_p=1.5$ dB

$$\varepsilon = \sqrt{10^{1.5/10} - 1} = 0,6423$$

$$\theta_1 = \frac{[2\pi(1-1)+\pi]}{4} = \pi/4$$

$$r = 0,6423^{-1/2} = 1,2478$$

$$K = 1,2478^2 = 1,5570$$

$$H(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^{2/2} (s^2 + 2 r s \cos(\theta_k) + r^2)} = \frac{1,557}{s^2 + 1,278 \sqrt{2} s + 1,557}$$

Filtre passe-bas Butterworth

- Des fonctions de transfert normalisées existent sous la forme $H(s)=1/D(s)$, avec $A_p = -3$ dB, $K=1$ et $\omega_c=1$
- Le dénominateur $D(s)$ est, pour un filtre d'ordre n :

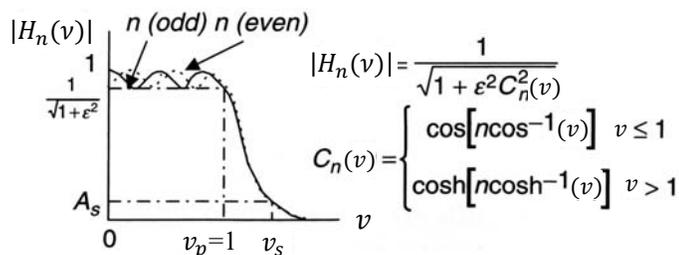
n	Dénominateurs normalisés et factorisés
1	$(1+s)$
2	$(1+1.414s+s^2)$
3	$(1+s)(1+s+s^2)$
4	$(1+0.765s+s^2)(1+1.848s+s^2)$
5	$(1+s)(1+0.618s+s^2)(1+1.618s+s^2)$
6	$(1+0.518s+s^2)(1+1.414s+s^2)(1+1.932s+s^2)$
7	$(1+s)(1+0.445s+s^2)(1+1.247s+s^2)(1+1.802s+s^2)$
8	$(1+0.390s+s^2)(1+1.111s+s^2)(1+1.663s+s^2)(1+1.962s+s^2)$
9	$(1+s)(1+0.347s+s^2)(1+s+s^2)(1+1.532s+s^2)(1+1.879s+s^2)$
10	$(1+0.313s+s^2)(1+0.908s+s^2)(1+1.414s+s^2)(1+1.782s+s^2)(1+1.975s+s^2)$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

25

Filtre passe-bas Chebyshev

- Réponse en amplitude caractéristique



- Bande de transition plus étroite que pour Butterworth
- Ondulations dans la bande passante (type I) ou la bande d'arrêt (type II), dépendant des pôles et zéros.

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

26

Filtre passe-bas Chebyshev

- Pour n impair:

$$B_n(s) = \frac{K}{[s + \sinh(\beta)] \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} (s^2 + b_k s + c_k)}$$

$$\beta = \frac{\sinh^{-1}(1/\varepsilon)}{n}$$

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$K = \sinh(\beta) \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} c_k$$

$$b_k = 2 \sin(\alpha_k) \sinh(\beta)$$

$$c_k = [\sin(\alpha_k) \sinh(\beta)]^2 + [\cos(\alpha_k) \cosh(\beta)]^2$$

Filtre passe-bas Chebyshev

- Pour n pair:

$$B_n(s) = \frac{K}{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (s^2 + b_k s + c_k)}$$

$$\beta = \frac{\sinh^{-1}(1/\varepsilon)}{n}$$

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$K = \sinh(\beta) \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{c_k}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$b_k = 2 \sin(\alpha_k) \sinh(\beta)$$

$$c_k = [\sin(\alpha_k) \sinh(\beta)]^2 + [\cos(\alpha_k) \cosh(\beta)]^2$$

Exemple

- Ondulation = 0,5 dB, n=3

$$(n-1)/2=1$$

$$\alpha_0 = \frac{(2 \times 0 + 1)\pi}{2 \times 3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.5/10} - 1} = 0,3493,$$

$$1/\varepsilon = 2,863$$

$$\beta = \frac{\sinh^{-1}(2,863)}{3} = 0,5914$$

$$b_0 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sinh(0,5914) = 0,6265$$

$$c_0 = \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sinh(0,5914) \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cosh(0,5914) \right]^2 = 1,1425$$

$$K = \sinh(\beta)c_0 = 0,7157$$

$$B_3(s) = \frac{0,7157}{[s+0,6265](s^2+0,6265s+1,1425)}$$

$$= \frac{0,7157}{(s^3+1,253s^2+1,535s+0,7157)}$$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

29

Filtre passe-bas Chebyshev

- $H(s)$ normalisé pour ondulations de 0,5 dB

n	$H_P(s)$
1	$\frac{2.8628}{s+2.8628}$
2	$\frac{1.4314}{s^2+1.4256s+1.5162}$
3	$\frac{0.7157}{s^3+1.2529s^2+1.5349s+0.7157}$
4	$\frac{0.3579}{s^4+1.1974s^3+1.7169s^2+1.0255s+0.3791}$
5	$\frac{0.1789}{s^5+1.1725s^4+1.9374s^3+1.3096s^2+0.7525s+0.1789}$
6	$\frac{0.0895}{s^6+1.1592s^5+2.1718s^4+1.5898s^3+1.1719s^2+0.4324s+0.0948}$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

30

Filtre passe-bas Chebyshev

- $H(s)$ normalisé pour ondulations de 1,0 dB

n	$H_P(s)$
1	$\frac{1.9652}{s+1.9652}$
2	$\frac{0.9826}{s^2+1.0977s+1.1025}$
3	$\frac{0.4913}{s^3+0.9883s^2+1.2384s+0.4913}$
4	$\frac{0.2456}{s^4+0.9528s^3+1.4539s^2+0.7426s+0.2756}$
5	$\frac{0.1228}{s^5+0.9368s^4+1.6888s^3+0.9744s^2+0.5805s+0.1228}$
6	$\frac{0.0614}{s^6+0.9283s^5+1.9308s^4+1.20121s^3+0.9393s^2+0.3071s+0.0689}$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

31

Transformation des prototypes

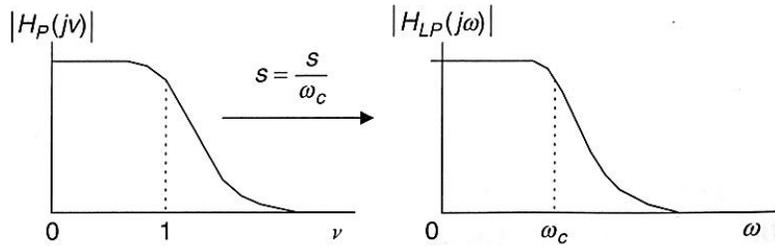
- Pour répondre aux spécifications, il faut « dénormaliser » les équations normalisées.
- Une substitution de variable pour s permet de transformer les prototypes en passe-bas, passe-haut, etc. avec les caractéristiques désirées.

Transformation	$s \rightarrow$
Pb \rightarrow Pb	αs
Pb \rightarrow PH	$\frac{\alpha}{s}$
Pb \rightarrow PB	$\frac{1}{B} \left(s + \frac{\omega_0}{s} \right)$
Pb \rightarrow CB	$\frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

32

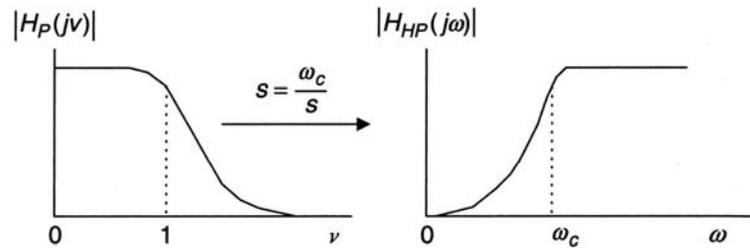
Prototype -> Passe-bas



$$H_{LP}(s) = H_P(s) \Big|_{s = s/\omega_c}$$

$$H_p(s) = \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{s/\omega_c + 1}$$

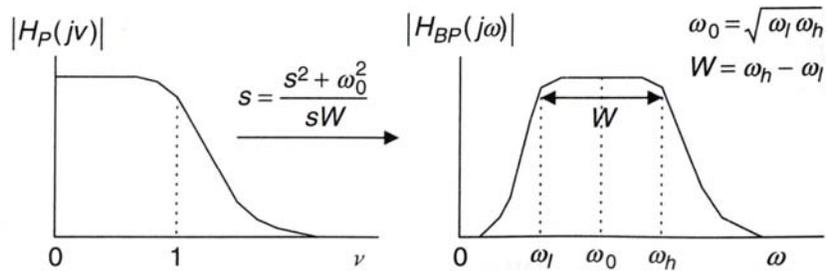
Prototype -> Passe-haut



$$H_{HP}(s) = H_P(s) \Big|_{s = \omega_c/s}$$

$$H_p(s) = \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{\omega_c/s + 1}$$

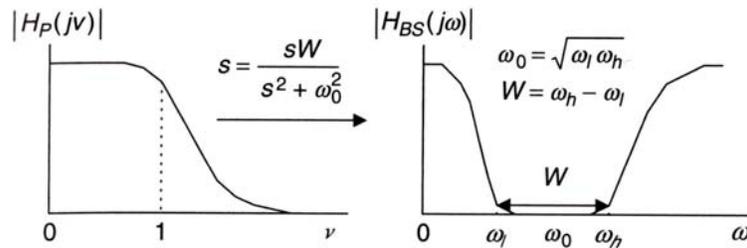
Prototype -> Passe-bande



$$H_{BP}(s) = H_P(s) \Big|_{s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{sW}}$$

$$H_p(s) = \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{\frac{s^2 + \omega_0^2}{sW} + 1} = \frac{sW}{s^2 + \omega_0^2 + sW}$$

Prototype -> Coupe-bande



$$H_{BS}(s) = H_P(s) \Big|_{s = \frac{sW}{s^2 + \omega_0^2}}$$

$$H_p(s) = \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{\frac{sW}{s^2 + \omega_0^2} + 1} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2 + sW}$$

Exemple

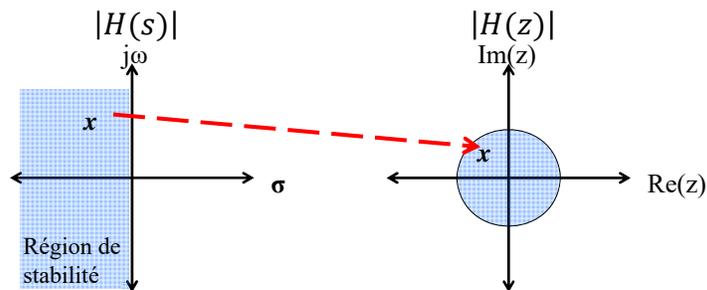
- Chebyshev passe-haut d'ordre 3, avec $\omega_c = 50$ rad/s et 0,5 dB d'ondulation

Version passe bas : $B_3(s) = \frac{0,7157}{(s^3 + 1,253s^2 + 1,535s + 0,7157)}$

$$\begin{aligned}
 B_{3H}(s) &= \frac{0,7157}{\left(\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^3 + 1,253\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^2 + 1,535\left(\frac{\omega_c}{s}\right) + 0,7157\right)} \\
 &= \frac{0,7157s^3}{(1,25 \times 10^5 + 3132,5s + 76,75s^2 + 0,7157s^3)} \\
 &= \frac{s^3}{s^3 + 107,2s^2 + 4376s + 1,747 \times 10^5}
 \end{aligned}$$

Transformation bilinéaire

- Définit une relation entre s et z pour transformer une fonction de transfert analogique en équivalent numérique



Transformation bilinéaire

- Normalement

$$z = e^{sT_e} \Rightarrow s = \frac{1}{T_e} \ln(z)$$

- On peut donc dériver H(z) de H(s) en posant :

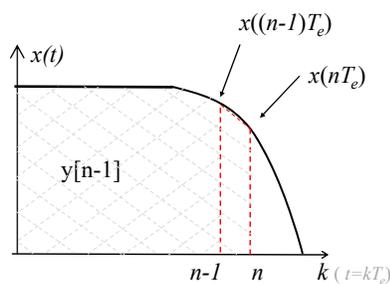
$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{1}{T_e} \ln(z)}$$



Donne des fractions non rationnelles!

- La transformation bilinéaire résout le problème en utilisant l'approximation d'une surface continue

Transformation bilinéaire



Surface de $x(t)$ à $t=kT_e$.

Continu

$$y(t) = \int_0^t x(t) dt$$

Transformée de Laplace

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s} \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$$

Discret

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] + x[n-1]}{2} T_e$$

Transformée z

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T_e}{2}(X(z) + z^{-1}X(z))$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Transformation bilinéaire

- $\frac{1}{s}$ dans s joue le même rôle que $\frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ dans z

↪ En posant $s = \frac{2}{T_e} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$, on peut dériver $H(z)$ de $H(s)$:

$$H(z) = H(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

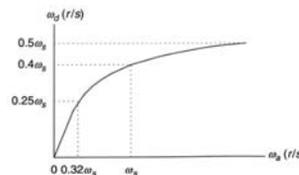
Effet sur la réponse en fréquence

- Conséquences dans le domaine $j\omega$:

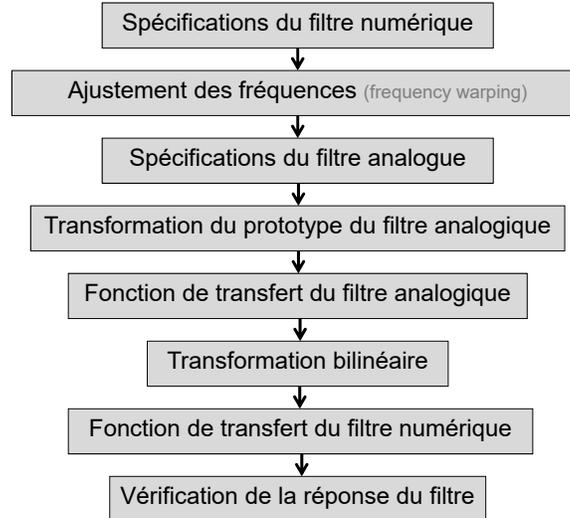
$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow j\omega_a = \frac{2}{T_e} \frac{1-e^{-j\omega_d T_e}}{1+e^{-j\omega_d T_e}} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{-j\omega_d T_e/2} - e^{-j\omega_d T_e}}{e^{-j\omega_d T_e/2} + e^{-j\omega_d T_e}} = j \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T_e}{2}\right)$$

- Les fréquences dans les domaines s et z ne sont pas les mêmes!

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T_e}{2}\right)$$



Conception avec la TBL



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

43

Estimation de l'ordre du filtre

- Partant de A_c et A_a , on a pour Butterworth :

$$A_s = -10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2 v_s^{2n})$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{-0.1A_s} - 1}{\varepsilon^2}\right)}{2 \log_{10}(v_s)}$$

$$A_p = -10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{-0.1A_p} - 1$$

$$\text{d'où : } n \geq \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{-0.1A_s} - 1}{10^{-0.1A_p} - 1}\right)}{2 \log_{10}(v_s)}$$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

44

Estimation de l'ordre du filtre

- Pour Chebyshev, on a en partant de A_a :

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \left[\left(\frac{10^{-0.1A_a} - 1}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\cosh^{-1}(v_a)}$$

Pour $v_c = 1$, on a $\cos(n \cos^{-1}(1))=1$, d'où $\varepsilon^2 = 10^{-0.1A_p} - 1$, et

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \left[\left(\frac{10^{-0.1A_a} - 1}{10^{-0.1A_p} - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\cosh^{-1}(v_a)}$$

Exemple 1

1. Filtre Chebyshev passe-bas

- Fréquence de coupure: 1,5 kHz
- Fréquence d'arrêt: 3,5 kHz
- Fréquence d'échantillonnage: 10 kHz
- Ondulation: 1,0 dB
- Atténuation dans la bande d'arrêt: 20 dB

2. Ajustement des fréquences

$$\omega_{ca} = \frac{2}{T_e} \tan \left(\frac{\omega_{cd} T_e}{2} \right) = 2 \times 10000 \tan \left(\frac{2\pi(1500)/10000}{2} \right) = 10\,191$$

$$\omega_{aa} = 2 \times 10000 \tan \left(\frac{2\pi(3500)/10000}{2} \right) = 39\,252$$

Exemple 1

3. Spécification du filtre analogue

Estimation de l'ordre :

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \left[\left(\frac{10^{0.1 \times 20} - 1}{10^{0.1 \times 1} - 1} \right)^{0.5} \right]}{\cosh^{-1} \left(\frac{39252}{10191} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left[\left(\frac{99}{0.2589} \right)^{0.5} \right]}{\cosh^{-1}(3.8516)}$$

$$= \frac{\cosh^{-1}[382.3870^{0.5}]}{\cosh^{-1}(3.8516)} = \frac{3.6656}{2.0243} = 1.81 \Rightarrow n=2$$

Fréquences normalisées

- Les fréquences normalisées sont:

Type de filtre	Spécifications du filtre analogue	Spécification du prototype du filtre passe-bas	
		V_p	V_a
Passe-bas	ω_{ap}, ω_{aa}	1	ω_{aa}/ω_{ap}
Passe-haut	ω_{ap}, ω_{aa}	1	ω_{ap}/ω_{aa}
Passe-bande	$\omega_{apb}, \omega_{aph}, \omega_{aab}, \omega_{aah}$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_{apb} \omega_{aph}}$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_{apb} \omega_{aph}}$	1	$\frac{\omega_{aah} - \omega_{aab}}{\omega_{aph} - \omega_{apb}}$
Coupe-bande	$\omega_{apb}, \omega_{aph}, \omega_{aab}, \omega_{aah}$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_{apb} \omega_{aph}}$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_{apb} \omega_{aph}}$	1	$\frac{\omega_{aph} - \omega_{apb}}{\omega_{aah} - \omega_{aab}}$

Exemple 1

4. Transformation du prototype passe-bas

$$\frac{0.9826}{s^2 + 1.0977s + 1.1025}$$

$$\frac{0.9826}{\left(\frac{s}{10191}\right)^2 + 1.0977\left(\frac{s}{10191}\right) + 1.1025}$$

$$\frac{1.0205 \times 10^8}{s^2 + 11\,187s + 1.145 \times 10^8}$$

Exemple 1

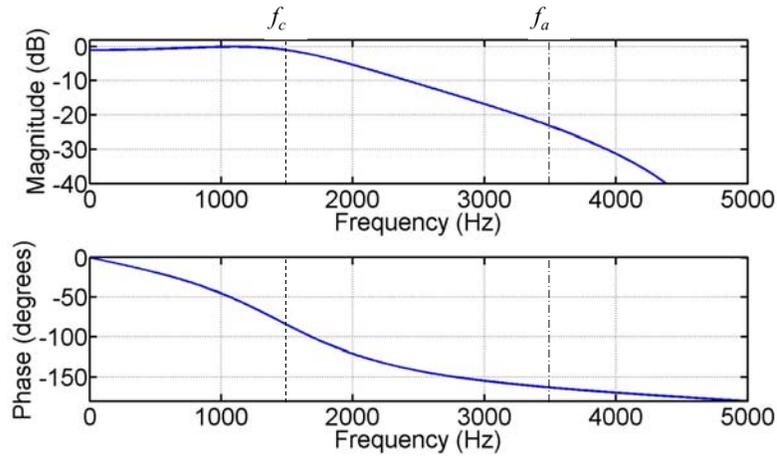
5. Transformation bilinéaire

$$H(z)$$

$$= \frac{1.0205 \times 10^8}{s^2 + 11\,187s + 1.145 \times 10^8} \Bigg|_{s=20000\frac{(z-1)}{(z+1)}}$$

$$H(z) = \frac{0.1382z^2 + 0.2765z + 0.1382}{z^2 - 0.7735z + 0.3939}$$

Exemple 1



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

51

Transformation bilinéaire

- Pour aller plus rapidement:

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega_d T_e}{2}\right) \text{ et } s = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow \frac{\omega_a}{\tan\left(\frac{\omega_d T_e}{2}\right)} = \frac{s}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{\omega_a} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_d T_e}{2}\right)} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- Peut dériver directement $H(z)$ de $H(s)$:

$$H(z) = H(s) \Bigg|_{s = \frac{\omega_a}{\tan\left(\frac{\omega_d T_e}{2}\right)} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

52

Exemple 2

- Filtre passe-bas Butterworth d'ordre 2, avec $f_c = 2$ kHz et $f_e = 8$ kHz
- Fonction passe bas normalisée:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Exemple 2

- Fonction de transfert dé-normalisée dans le domaine des z:

$$H(z) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Bigg|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad \text{avec } a = \tan\left(\frac{\omega_a T_e}{2}\right)$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(\frac{1 + \sqrt{2}a + a^2}{a^2}\right) + 2\left(\frac{a^2 - 1}{a^2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1 - \sqrt{2}a + a^2}{a^2}\right)z^{-2}} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

Exemple 2

- Code MATLAB pour obtenir les coefficients:

```

a = tan(pi*2/8); % fréquence de coupure à 2kHz, fe à 8 kHz
b = 1 + 2^0.5*a + a^2;
b0 = a^2/b;
b1 = 2*b0;
b2 = b0;
a1 = 2*(a^2 - 1)/b;
a2 = (1 - 2^0.5*a + a^2)/b;

numz = [b0 b1 b2];
denz = [1 a1 a2];

figure(1)
freqz(numz,denz,512,8000)

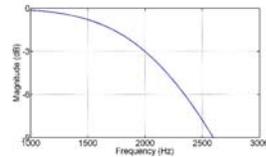
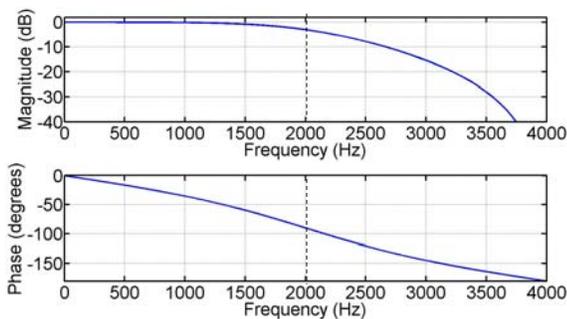
fid = fopen('IIR_coef_float.txt', 'w'); % sauvegarde des coefficients
fprintf(fid, '%0.4f, %0.4f, %0.4f\n', numz);
fprintf(fid, '%0.4f, %0.4f\n', denz);
fclose(fid);

```

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(\frac{1 + \sqrt{2}a + a^2}{a^2}\right) + 2\left(\frac{a^2 - 1}{a^2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1 - \sqrt{2}a + a^2}{a^2}\right)z^{-2}} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

Résultats : numérateur = [0.1311, 0.2622, 0.1311]
 dénominateur = [1, -0.7478, 0.2722]

Exemple 2



Exemple 3

- Filtre passe-bande Chebyshev d'ordre 1
 - Bande passante de 200 Hz centrée à 2.5 khz
 - Ondulation de 0.5 dB
 - Fréquences d'arrêt:
 - 1.5 kHz
 - 3.5 kHz
 - Atténuation à l'arrêt : -10 dB
 - Fréquence d'échantillonnage: 8 kHz

Exemple 3

- Ajustement des fréquences

$$\omega_{dph} = 2\pi f_{dph} = 2\pi(2600) = 5200\pi \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{dpb} = 2\pi f_{dpb} = 2\pi(2400) = 4800\pi \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{d0} = 2\pi f_{d0} = 2\pi(2500) = 5000\pi \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{aph} = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega_{dph} T_e}{2}\right) = 2 \times 8000 \tan\left(\frac{5200\pi/8000}{2}\right) = 26\,110 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{apb} = 2 \times 8000 \tan\left(\frac{4800\pi/8000}{2}\right) = 22\,022 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{a0} = 2 \times 8000 \tan\left(\frac{500\pi/8000}{2}\right) = 23\,946 \text{ rad/sec}$$

Exemple 3

- Les formules de dé-normalisation exigent:

$$\omega_{a0} = \sqrt{\omega_{aph}\omega_{apb}}$$

mais:

$$\omega_{a0} = \sqrt{26\,110 \times 22\,022} = 23\,979 \neq 23\,946$$

- On doit ajuster ω_{aph} ou ω_{apb} à la fréquence ω_{a0} .

Exemple 3

- Première possibilité:

$$\omega_{aph} = \frac{\omega_{a0}^2}{\omega_{apb}} = \frac{(23\,946)^2}{22\,022} = 26\,038$$

$$W = \omega_{aph} - \omega_{apb} = 26\,038 - 22\,022 = 4016$$

- Deuxième possibilité:

$$\omega_{apb} = \frac{\omega_{a0}^2}{\omega_{aph}} = \frac{(23\,946)^2}{26\,110} = 21\,961$$

$$W = \omega_{aph} - \omega_{apb} = 26\,038 - 21\,961 = 4149$$

- La première option est un meilleur choix (W plus étroit)
- Le même ajustement doit être fait pour la bande d'arrêt si ν_s est évalué pour estimer l'ordre du prototype.
 - Voir exemples 8.12 & 8.13 dans Tan

Exemple 3

- Transformation du prototype analogique :

$$H(s) = \frac{2.8628}{s+2.8628}$$

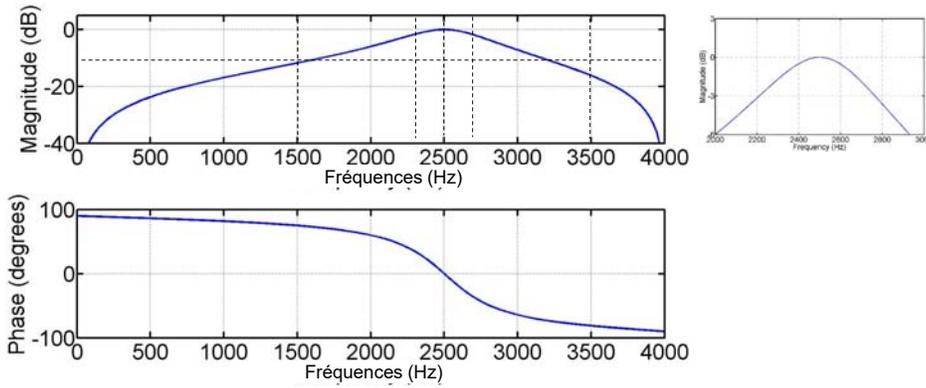
$$\begin{aligned} H(s) \Big|_{s=\frac{s^2+\omega_{a0}^2}{sW}} &= \frac{2.8628 Ws}{s^2 + 2.8628 Ws + \omega_{a0}^2} \\ &= \frac{11\,497s}{s^2 + 11\,497s + 5.7341 \times 10^8} \end{aligned}$$

Exemple 3

- Transformation bilinéaire

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{11\,497s}{s^2 + 11\,497s + 5.7341 \times 10^8} \Big|_{s=16\,000\frac{z-1}{z+1}} \\ &= \frac{0.1815 - 0.1815 z^{-2}}{1 + 0.6264 z^{-1} + 0.6369 z^{-2}} \end{aligned}$$

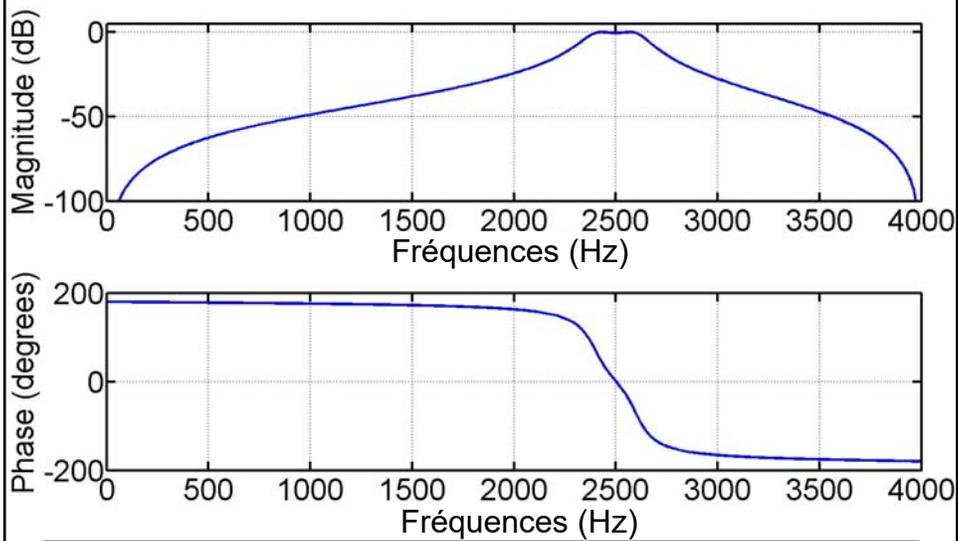
Exemple 3



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

63

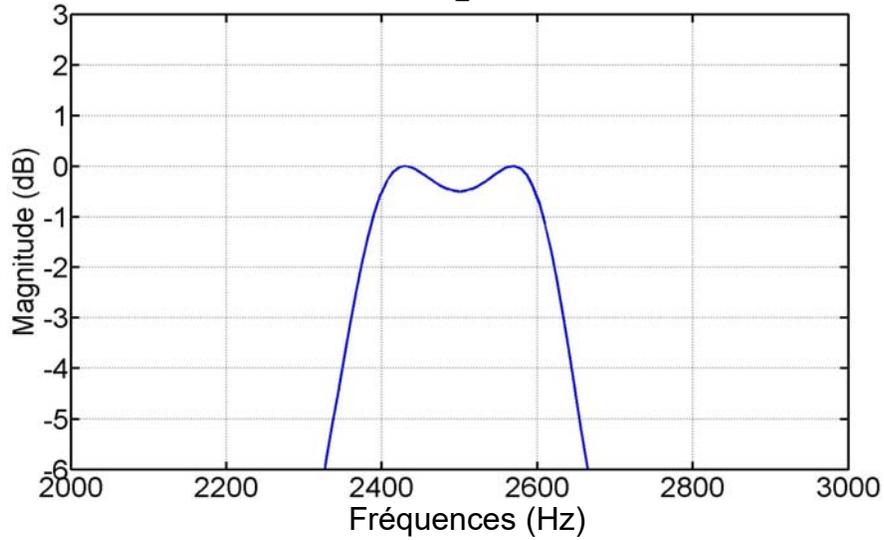
Exemple 4



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

64

Exemple 4



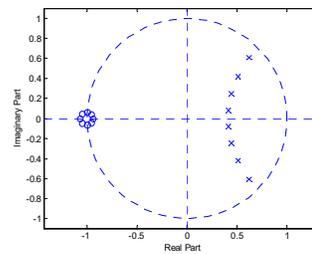
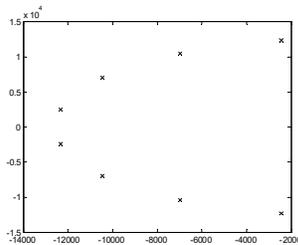
Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

65

La TBL en MATLAB

```
[num,den]=butter(8,2*pi*2000,'s'); % Filtre PB de Butterworth dans le domaine s
                                     % avec N=8, fc=2 kHz
figure(1); plot(p,'xk');           % digramme des pôles, marqués par des x noirs
figure(2); freqs(num,den);         % réponse en fréquence analogique

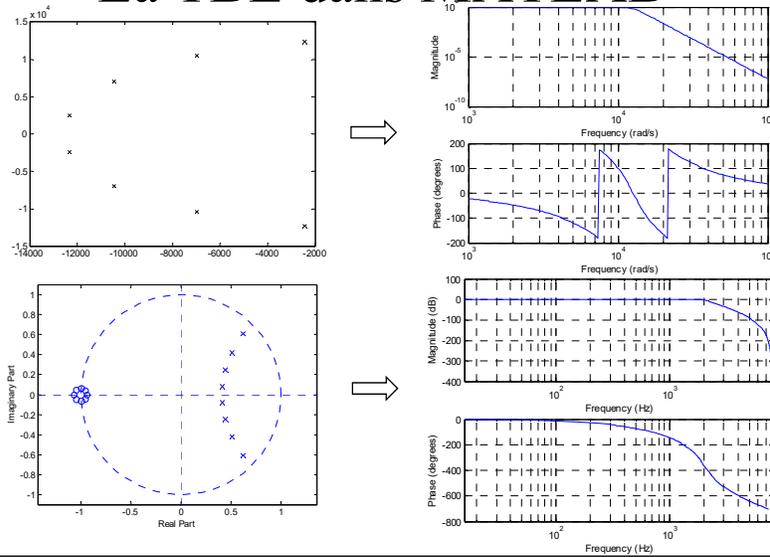
[numz,denz] = bilinear(num,den,16000); % transformation bilinéaire avec fe=16 KHz
figure(3); zplane(numz, denz);     % digramme des pôles et zéros dans le plan z
figure(4); freqz(numz,denz,512,16000); % réponse en fréquence numérique
```



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

66

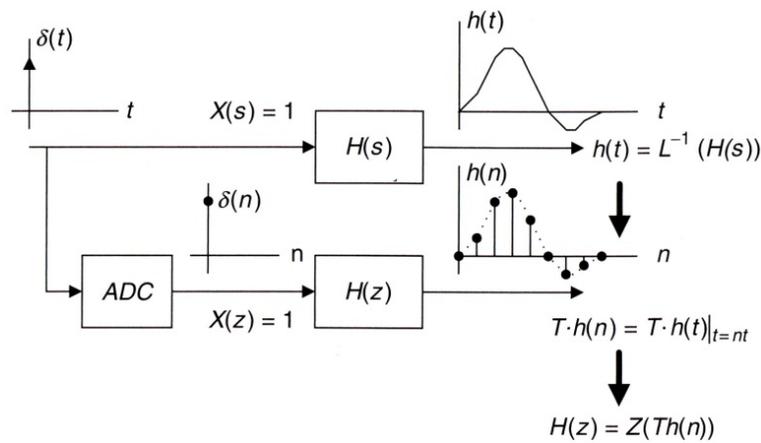
La TBL dans MATLAB



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

67

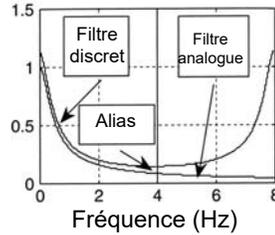
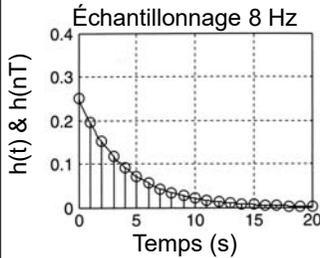
Calcul des coefficients par invariance de la réponse impulsionnelle



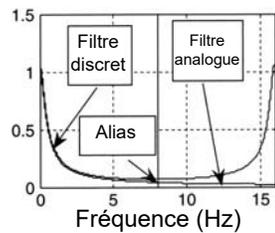
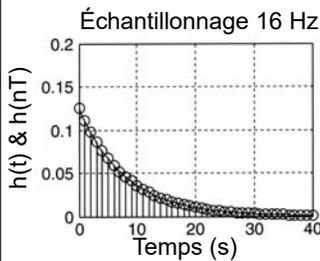
Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

68

Invariance de la réponse impulsionnelle



- Méthode applicable seulement aux filtres à bande passante finie (passe-bas et passe-bande) !



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

69

Exemple 5

- Déterminer $H(z)$ si $f_e = 10$ Hz

$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{2}{s+2} \right] = 2e^{-2t}u(t)$$

$$h[n] = T_e h(nT_e) = 0,2e^{-0,2n}u[n]$$

$$H(z) = Z[0,2e^{-0,2n}u[n]] = \frac{0,2}{1-0,8187z^{-1}}$$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

70

Exemple 5

- Ajustement du gain

$$H(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = 1,1031$$

Après normalisation :

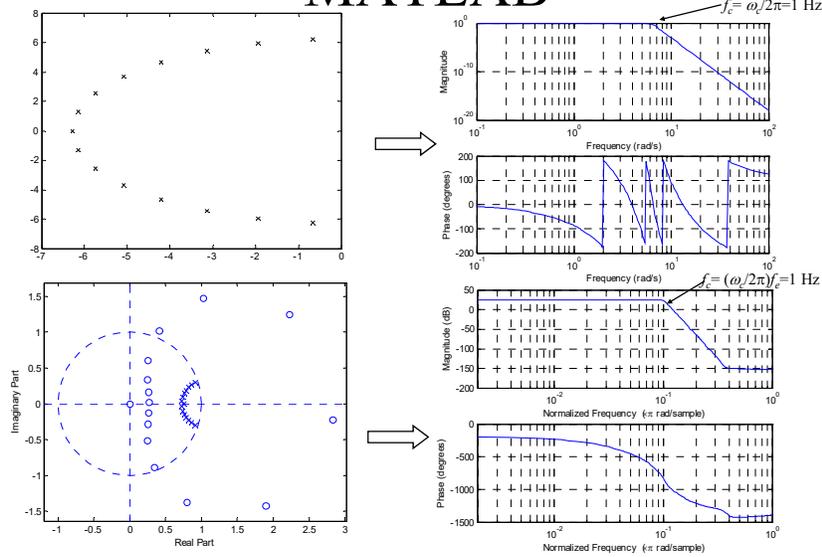
$$H(z) = \frac{1}{1,1031} \frac{0,2}{1-0,8187z^{-1}} = \frac{0,1813}{1-0,8187z^{-1}}$$

MATLAB

```
% Filtre passe bas de butterworth par la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle N=15, fc=1Hz et fe=20 Hz
[num,den]=butter(15, 2*pi, 's'); % Filtre Passe Bas de Butterworth dans le domaine s avec N=15, fc=1 Hz
[a, p, K] = residue(num,den); % Décomposition de H(s) en fractions élémentaires par la méthode des résidus :  $H(s) = K + \sum_i \frac{a_i}{s-p_i}$ 
figure(1); plot(p,'k'); % Diagramme des pôles maqués par des x noirs
figure(2); freqs(num,den); % Réponse en fréquence analogique

%  $\frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2}$  dans s donne  $(Ae^{p_1t} + Be^{p_2t})u(t)$  dans t, ce qui donne dans z :
%
%  $A \frac{z}{z-e^{p_1T_e}} + B \frac{z}{z-e^{p_2T_e}} = (A+B) + \frac{Ae^{p_1T_e}}{z-e^{p_1T_e}} + \frac{Be^{p_2T_e}}{z-e^{p_2T_e}}$ 
Te=0.05; % => fc normalisé = 1Hz/(fe/2) =0.1
pz = exp(p*Te); % conversion des pôles dans s en des pôles dans z
az = a.*pz; % détermination des coefficients des fractions élémentaires correspondantes
K=K*sum(a); % Terme continu
[numz, denz] = residue(az, pz, K); % détermination de H(z) à partir des fractions élémentaires dans z
figure(3); zplane(numz, denz); % diagramme des pôles et zéros dans le plan z
figure(4); freqz(numz, denz); % réponse en fréquence numérique
```

MATLAB



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

73

Calcul des coefficients par Placement des pôles et zéros

- Basé sur le principe que, dans le plan Z:
 - Un **zéro** près (ou sur) du cercle unité **minimise la réponse** en fréquence à cet endroit.
 - Un **pôle** près (ou sur) du cercle unité **maximise la réponse** en fréquence à cet endroit.
 - Pour obtenir un filtre réalisable (avec des coefficients réels), les pôles et zéros doivent avoir une valeur réelle ou apparaître par paires conjuguées

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

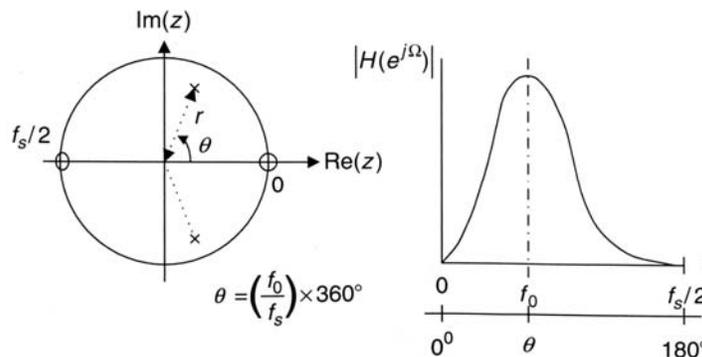
74

Placement des pôles et zéros

- Méthode intuitive mais approximative
- Efficace pour les filtres:
 - Passe-bandes ou coupe-bandes **étroits**;
 - Passe-bas avec une fréquence de coupure près de zéro;
 - Passe-haut avec une fréquence de coupure près de la fréquence de pliure.
- [Démonstration](#)

Passe-bande

- Utilise un filtre de deuxième ordre:



$$H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} = \frac{K(z^2-1)}{(z^2-2rz\cos\theta+r^2)}$$

Passe-bande

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} = \frac{K(z^2-1)}{(z^2-2rz\cos\theta+r^2)}$$

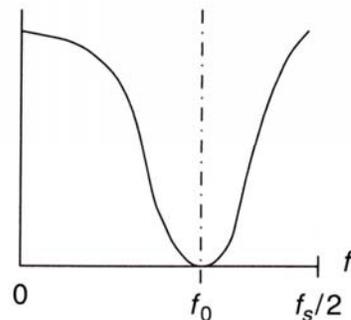
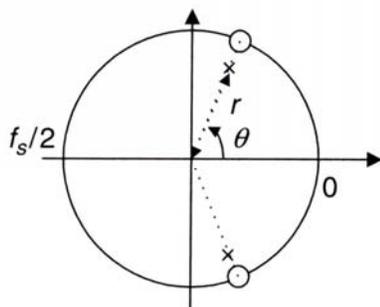
$$r \approx 1 - \left(\frac{BP_{3dB}}{f_e}\right) \times \pi \quad \text{Valide lorsque } 0.9 \leq r < 1$$

$$\theta = \left(\frac{f_0}{f_e}\right) \times 360^\circ$$

$$K = \frac{(1-r)\sqrt{1-2r\cos(2\theta)+r^2}}{2|\sin\theta|}$$

Coupe-bande

- Utilise un filtre de deuxième ordre:



$$H(z) = \frac{K(z-e^{j\theta})(z+e^{-j\theta})}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} = \frac{K(z^2-2z\cos\theta+1)}{(z^2-2rz\cos\theta+r^2)}$$

Coupe-bande

$$H(z) = \frac{K(z - e^{j\theta})(z + e^{-j\theta})}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})} = \frac{K(z^2 - 2z \cos \theta + 1)}{(z^2 - 2rz \cos \theta + r^2)}$$

$$r \approx 1 - \left(\frac{BP_{3dB}}{f_e} \right) \times \pi \quad \text{Valide lorsque } 0.9 \leq r < 1$$

$$\theta = \left(\frac{f_0}{f_e} \right) \times 360^\circ$$

$$K = \frac{1 - 2r \cos(2\theta) + r^2}{2 - 2 \cos \theta}$$

Exemple 6

- Filtre coupe-bande:
 - $f_c = 10$ kHz
 - Bande d'arrêt 3dB: 200 Hz
 - Centré à 3 kHz

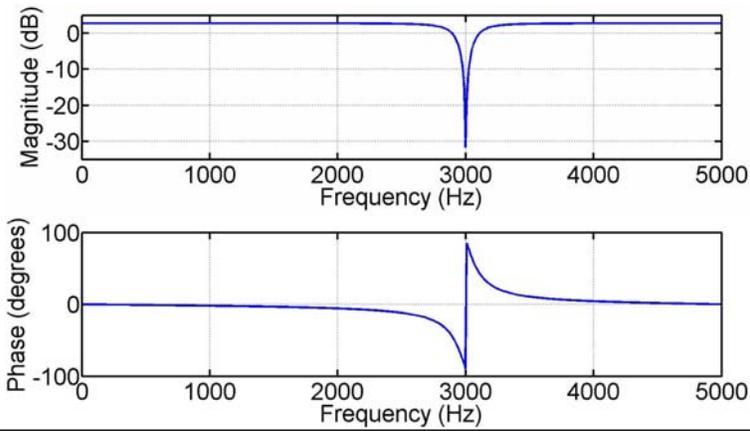
$$r \approx 1 - \left(\frac{BP_{3dB}}{f_e} \right) \times \pi = 1 - \left(\frac{200}{10000} \right) \times \pi = 0,937$$

$$\theta = \left(\frac{f_0}{f_e} \right) \times 360^\circ = \left(\frac{3000}{10000} \right) \times 360^\circ = 108^\circ$$

$$K = \frac{1 - 2r \cos(2\theta) + r^2}{2 - 2 \cos \theta} = \frac{1 - 2 \times 0,937 \cos(216^\circ) + (0,937)^2}{2 - 2 \cos 108^\circ} = 1,296$$

Exemple 6

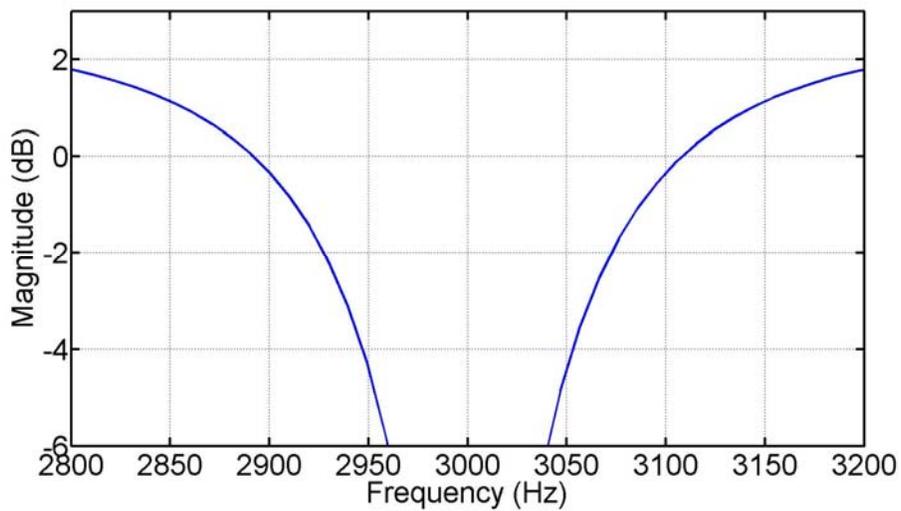
$$H(z) = \frac{K(z^2 - 2z \cos \theta + 1)}{(z^2 - 2rz \cos \theta + r^2)} = \frac{1,296z^2 + 0,801z + 1,296}{z^2 + 0,579z + 0,878}$$



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

81

Exemple 6



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

82

Passé-bas

Filtre d'ordre 1:

$$f_c < f_e/4$$

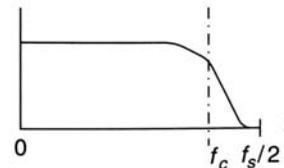
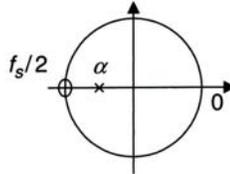
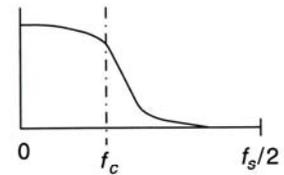
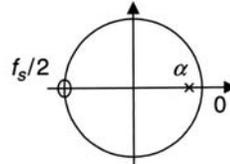
$$\alpha \approx 1 - 2 \left(\frac{f_c}{f_e} \right) \times \pi$$

Valide pour $0.9 \leq r < 1$

$$f_c > f_e/4$$

$$\alpha \approx -(1 - \pi + 2 \left(\frac{f_c}{f_e} \right) \times \pi)$$

Valide pour $-1 \leq r < -0.9$



$$K = \frac{(1 - \alpha)}{2}$$

$$H(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - \alpha)}$$

Passé-haut

Filtre d'ordre 1:

$$f_c < f_e/4$$

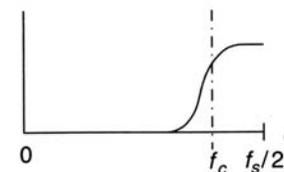
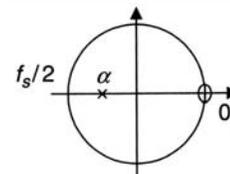
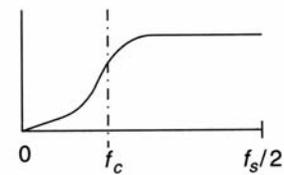
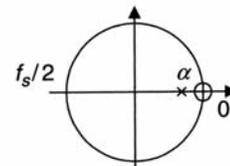
$$\alpha \approx 1 - 2 \left(\frac{f_c}{f_e} \right) \times \pi$$

Valide pour $0.9 \leq r < 1$

$$f_c > f_e/4$$

$$\alpha \approx -(1 - \pi + 2 \left(\frac{f_c}{f_e} \right) \times \pi)$$

Valide pour $-1 \leq r < -0.9$



$$K = \frac{(1 + \alpha)}{2}$$

$$H(z) = \frac{K(z - 1)}{(z - \alpha)}$$

Exemple 7

- Filtre passe-bas:

- $f_c = 10$ kHz

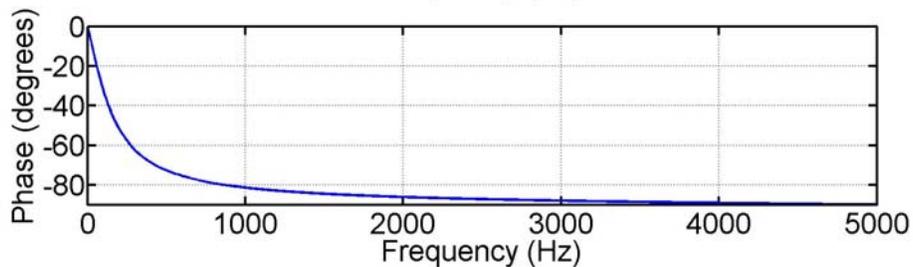
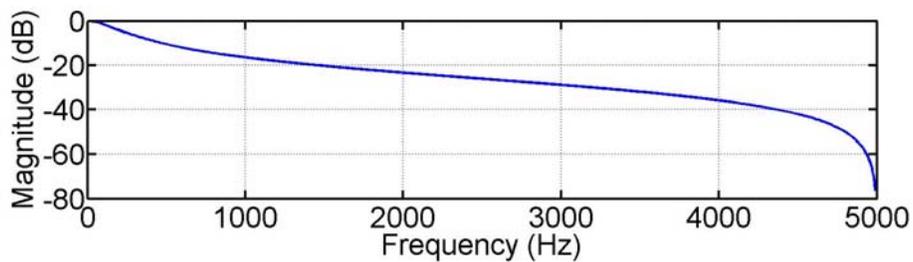
- $f_e = 150$ Hz

$$\alpha = 1 - 2 \left(\frac{f_c}{f_e} \right) \times \pi = 1 - 2 \left(\frac{150}{10000} \right) \times \pi = 0.906$$

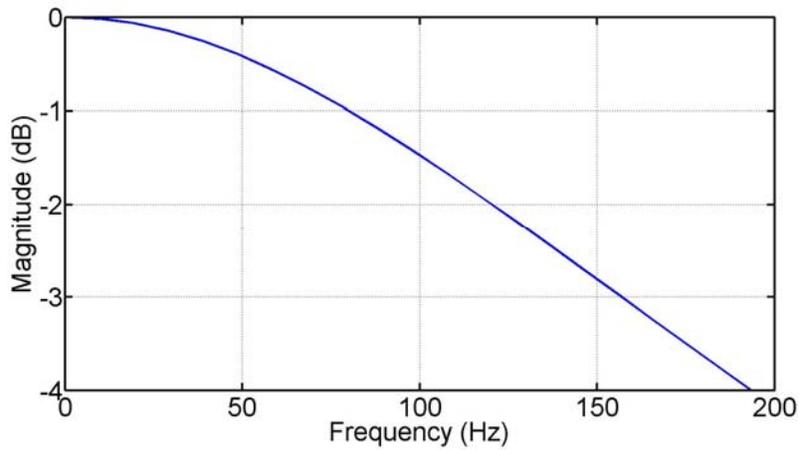
$$H(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - \alpha)} = \frac{0.0471(z + 1)}{(z - 0.906)}$$

$$1/K = H(z) \Big|_{z=1} = \frac{(z + 1)}{(z - 0.906)} = 21.277$$

Exemple 7



Exemple 7



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

87

MATLAB

```
% Conception et simulation d'un filtre par placement de pôles et zéros
pole1 = 0.5+0.5i;           % création de deux paires de pôles conjugués
pole2 = 0.8 +0.25i;
pole3 = conj(pole1); pole4 = conj(pole2);
poles = [pole1 pole2 pole3 pole4];

zero1 = -0.5 + 0.8i;        % création de deux paires de zéros conjugués
zero2 = -0.2 + 0.9i;
zero3 = conj(zero1); zero4 = conj(zero2);
zeros = [zero1 zero2 zero3 zero4];

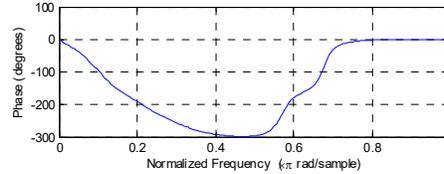
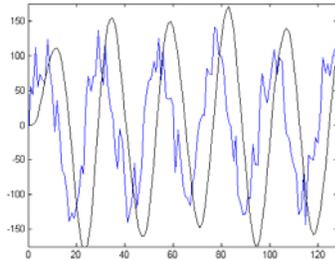
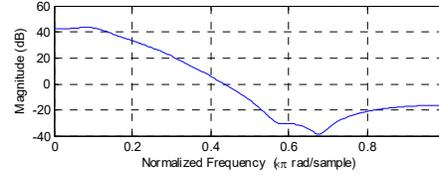
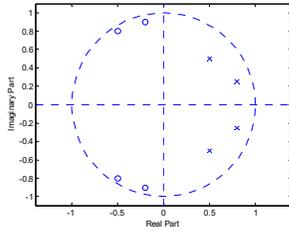
denz=poly(poles);           % conversion des pôles en dénominateur de H(z)
numz=poly(zeros);           % numérateur de H(z) = 1
zplane(numz, denz);         % affichage des pôles et zéros
figure(2); freqz(numz,denz,256); % affichage de la réponse en fréquence

t=[0:1:127];                % test avec 128 valeurs d'un sinus corrompu
x=sin(2*pi*t/24);
x=x+rand(1,128)-0.5;
y=filter(numz,denz,x);
figure(3); plot(t,100*x,'b',t,y,'k');axis([0 128 -175 175]);axis('normal');
```

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

88

MATLAB



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

89

MATLAB

```
% Autre exemple en utilisant des coordonnées polaires
angl=[0.2: 0.1: 0.5]*pi/2;           % création de 4 paires conjuguées de pôles
poles=0.85*exp(j*angl);
poles=[poles 0.85*exp(-j*angl)];

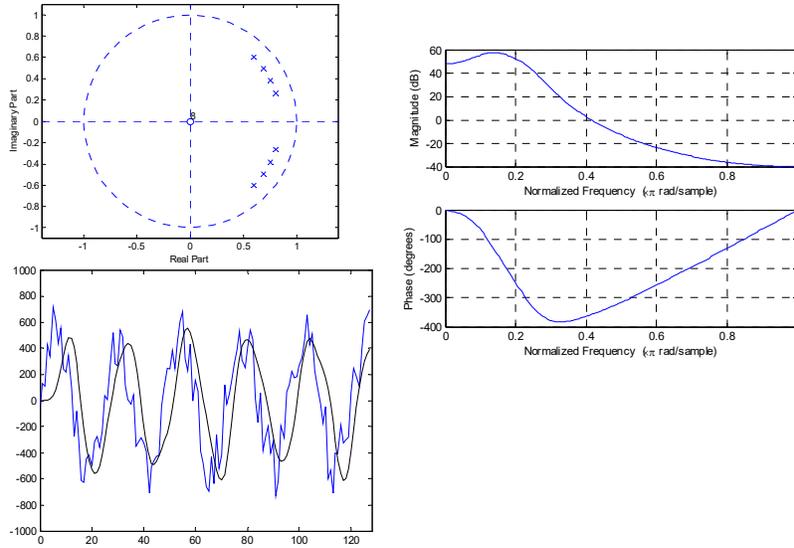
denz=poly(poles)                     % conversion des pôles en dénominateur de H(z)
numz=[1];                             % numérateur de H(z) = 1
zplane(numz, denz);                  % affichage des pôles et zéros
figure(2); freqz(numz,denz,256);     % affichage de la réponse en fréquence

t=[0:1:127];                          % test avec 128 valeurs d'un sinus bruité
x=sin(2*pi*t/24);
x=x+rand(1,128)-0.5;
y=filter(numz,denz,x);
figure(3); plot(t,500*x,'b',t,y,'k');axis([0 128 -1000 1000]);axis('normal');
```

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

90

MATLAB



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

91

Mise en œuvre de filtre RII

- Forme directe I:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$$

- Équation aux différences:

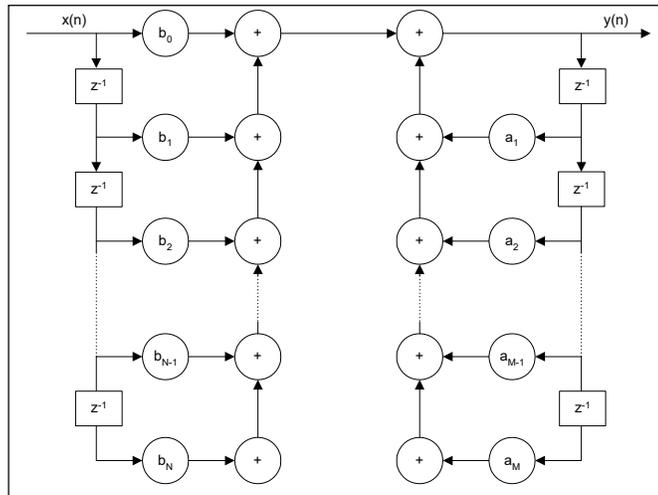
$$y[n] = \sum_{k=0}^N b[k]x[n-k] + \sum_{k=1}^M a[k]y[n-k]$$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

92

Mise en œuvre de filtre RII

- Forme directe I:



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

93

Mise en œuvre de filtre RII

- Forme directe II:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} = H_1(z)H_2(z)$$

- Avec:

$$H_1(z) = \frac{P(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad \text{et} \quad H_2 = \frac{Y(z)}{P(z)} = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}$$

- La transformée inverse de $P(z)$ et $Y(z)$ donne:

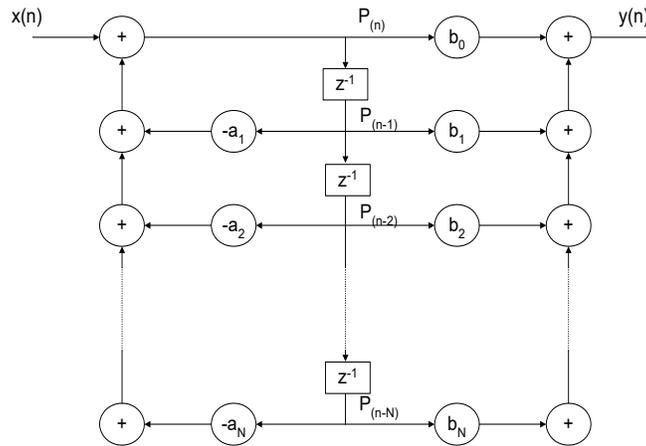
$$p(n) = x(n) - \sum_{k=1}^M a_k p(n-k) \quad y(n) = \sum_{k=0}^N b_k p(n-k)$$

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

94

Mise en œuvre de filtre RII

- Forme directe II:



Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

95

Exemple de programme

Code C

```

/*IIR.c IIR filter using cascaded Direct Form II. y(n)= Σ ax(n-k)-by(n-j)*/
Void IIR_Isr(void) {
    short a1 = 0x0; // coefficients du filtre
    short a2 = 0x15f6;
    short b0 = 0x257d;
    short b1 = 0x4afd;
    short b2 = 0x257d;

    static short p1=0, p2=0; // variables persistentes
    short xn, p0, y0; // variables d'e/s

    xn = input_sample();
    pn=xn-((b0*p1)>>15)-((b1*p2)>>15); //x- Σbp(n-k)
    yn=((a0*pn)>>15) + ((a1*p1)>>15) + ((a2*p2)>>15); //Σ ap(n-k)
    p2 = p1;
    p1 = p0;

    output_sample(y0); // Envoyer le signal au port de sortie sériel
}
    
```

- >>15 non requis si calculs fait en virgule flottante
- Noter l'absence de boucles for

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

96

Exemple de programme

Code C plus rapide

```
void IIR_Isr (void)
{
    short a1 = 0x0;           // coefficients du filtre
    short a2 = 0x15f6;
    short b0 = 0x257d;
    short b1 = 0x4afd;
    short b2 = 0x257d;

    static short p1=0, p2=0;  // variables persistentes
    short xn, p0, y0;         // variables d'e/s
    int prod1, prod2, prod3, prod4, prod5; // termes intermédiaires

    xn = input_sample();
    prod1 = _mpy(p2,a2);      // _mpy est une fonction du DSP
    prod2 = _mpy(p1,a1);
    p0 = xn - (short)((prod1 + prod2)>>15);
    prod3 = _mpy(p1,b1);
    prod4 = _mpy(p2,b2);
    prod5 = _mpy(p0,b0);
    y0 = (short)((prod3+prod4+prod5)>>15);
    p2 = p1;
    p1 = p0;

    output_sample(y0);      // Envoyer le signal au port de sortie sériel
}
```

>>15 non requis si calculs fait en virgule flottante

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

97

Exemple de programme

Code assembleur linéaire

```
.def _iir_sa
.sect "mycode"

_iir_sa .cproc a1, a2, b0, b1, b2, delays, x_ptr, y_ptr, mask, mask2

.reg p0, p1, p2
.reg prod1, prod2, prod3, prod4, prod5
.reg sum1, sum2, sum3
.reg x, y0

LDW *x_ptr, x
AND x,mask,x
LDH *+delays[0], p1
LDH *+delays[1], p2
MPY a1, p1, prod1
MPY a2, p2, prod2
ADD prod1, prod2, sum1
SHR sum1, 15, sum1
ADD x, sum1, p0
MPY b0, p0, prod3
MPY b1, p1, prod4
MPY b2, p2, prod5
ADD prod4, prod5, sum2
ADD prod3, sum2, sum3
SHRU sum3, 15, y0

STH p1, *+delays[1]
STH p0, *+delays[0]
AND y0, mask2, y0
STW y0, *y_ptr

.return y0
.endproc
```

Mounir Boukadoum, Michaël Ménard et autres sources sur Internet

98

Sommaire

Méthode	TBL	Impulsionnelle	Pôles-Zéros
Type de filtre	Passe-bas, passe-haut, passe-bande, Coupe-bande	Passe-bas, passe-bande	Formules: Passe-bande et coupe-bande de 2 ^{ième} ordre. Passe-bas et passe-haut de 1 ^{ier} ordre. Autre: Essais-erreurs
Phase linéaire	Non	Non	Non
Conditions spéciales	Aucune	Échantillonnage élevé par rapport à la fréquence de coupure.	Filtres étroits
Complexité de l'algorithme	Élevé	Modéré	Simple
Outils de conception requis	Calculatrice	Calculatrice	Calculatrice

Prochain cours

- Lire:
 - Chapitre 10 dans Tan
- Problèmes:
 - 8.3, 8.5, 8.13, 8.15, 8.19, 8.23, 8.25, 8.29, 8.32